

# Wir basteln uns ein Glockenspiel

So soll es aussehen



## Wie entstehen die Töne?

Würde das Glockenspiel am Kopfende angestoßen, so würden damit Longitudinalschwingungen erzeugt. Diese Schwingungen sind allerdings im allgemeinen zu hoch für das menschliche Ohr.

Statt dessen werden die Klangkörper an der Seite angestoßen, so dass Transversal-, Quer- oder Biegeschwingungen entstehen.

## Wodurch wird die Tonhöhe bestimmt?

Die Tonhöhe wird durch die Geometrie und das Material der Klangstäbe bestimmt. Im folgenden werden diese Variablen benutzt:

- Geometrie-Kenngrößen

l: Länge

$\chi$ : Trägheitsradius

Der Trägheitsradius ist für hohle Rundstäbe gegeben durch

$$\chi = 1/2 \sqrt{R^2 + r^2} \quad (1)$$

wobei R dem Außen- und r dem Innen-Radius entspricht.

- Materialkenngrößen:

G: Torsionsmodul

$\rho$ : Dichte

Wir benötigen noch die Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{G/\rho} \quad (2)$$

Damit definieren wir den Beiwert  $m_k$  mit

$$\omega_k = m_k^2 \frac{\chi c}{l^2} \quad (3)$$

Die Schwingungsfrequenz liegt damit bei

$$v_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{m_k^2 \chi c}{2\pi l^2} = \frac{m_k^2 \chi}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4)$$

Sie ist vom Beiwert  $m_k$  abhängig, der für frei schwingende Stäbe Lösung folgender Gleichung ist [1]:

$$1 - \cos m_k \cosh m_k = 0 \quad (5)$$

Diese transzendente Gleichung kann nur numerisch oder graphisch gelöst werden. Die Lösung ist

$$m_k = \frac{2k+1}{2} \pi - (-1)^k \beta_k \quad (6)$$

In Zahlen ausgedrückt:

k	m <sub>k</sub>	
1	$3/2 \pi + 0,01765$	4,73004
2	$5/2 \pi - 0,00078$	7,85320
3	$7/2 \pi + 0,00004$	10,99561
4	$9/2 \pi - 0$	14,13717

Tabelle 1: Beiwerte

Man sieht, dass für große k der Wert gegen  $(2k+1)/2 \cdot \pi$  geht.

Mit k=1 wird der Grundton beschrieben, höhere k geben die harmonischen an.

Zusammengefasst ist die Tonhöhe von geometrischen und Materialeigenschaften bestimmt. Außerdem wirkt noch der Beiwert m<sub>k</sub> mit, der nur numerisch oder graphisch bestimmt werden kann.

Die Schwingungsknoten liegen bei

k	x/l					
1		0,2242			0,7758	
2		0,1321		0,5000		0,8679
3	0,0944		0,3558		0,6442	0,9056
4	0,0735	0,2768		0,5000	0,7232	0,9265
5	0,0601	0,2265	0,4091	0,5091	0,7735	0,9399

Tabelle 2: Lage der Schwingungsknoten

und die Bäuche entsprechend dazwischen.

## Harmonielehre

Das Glockenspiel soll aus fünf Klangkörpern bestehen, die wohlklingend zueinander gestimmt sein sollen.

Zwei Töne werden als harmonisch empfunden, wenn ihre Frequenzen in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen [2].

Oktave	1:2	c' : c''
Quinte	2:3	c' : g'
Quarte	3:4	c' : f'
große Terz	4:5	c' : e'
kleine Terz	5:6	c' : g'

Diesen Konsonanzen stehen die Dissonanzen gegenüber.

Sekunde	8:9	c' : d'
Septime	8:15	c' : h'

Sollen mehrere Töne eine Konsonanz bilden, so müssen sie dies paarweise tun:

- Dur Dreiklang: c' : e' : g' 4 : 5 : 6 große Terz : kleine Terz
- 4-stimmiger Dreiklang: c' : e' : g' : c'' 4 : 5 : 6 : 8 große Terz : kleine Terz : Quarte

Für dieses Glockenspiel werden die Töne g' : c'' : e'' : g'' : c''' gewählt, also eine Folge aus Quarte, großer Terz, kleiner Terz und wieder einer Quarte.

Hier sind die Intervalle in der reinen Stimmung angenommen [3]:

Name des Tones	c'	d'	e'	f'	g'	a'	h'	c''
Frequenzverhältnis zum Grundton	1/1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1
Frequenzverhältnis zum vorigen Ton		9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

Die Verhältnisse 8:9 und 9:10 entsprechen ganzen Tonschritten (große Sekunde), das Verhältnis 15:16 jeweils halben Tönen (kleine Sekunde).

Ein Musikinstrumenten mit festen Tönen, wie dem Klavier, wird jedoch gleichschwebend temperiert gestimmt. Die Oktave wird in zwölf Halbtöne mit dem Frequenzverhältnis

$$\nu_2/\nu_1 = \sqrt[12]{2/1} \approx 1,05946$$

unterteilt.

Das Glockenspiel kann jedoch in reiner Stimmung realisiert werden. Zur Berechnung der Frequenzen ist noch ein Ton zu definieren:

$$a' := 440 \text{ Hz} \quad (7)$$

Womit sich als Schwingungsfrequenzen für dieses Glockenspiel ergeben:

Ton	von a'=440 Hz	Frequenz [Hz]
g'	10/9	396
c''	9/8, 16/15	528
e''	9/8, 16/15, 9/8, 10/9	660
g''	9/8, 16/15, 9/8, 10/9, 16/15, 9/8	792
c'''	2/1, 9/8, 16/15	1056

Tabelle 3: Töne und Frequenzen

## Herstellung der Rohre

Zur Herstellung benötigen wir zum Beispiel Rohre wie sie im Baumarkt erhältlich sind. Hier werden Aluminiumrohre mit Außendurchmesser  $2R=12\text{mm}$  und Innendurchmesser  $2r=10\text{mm}$  verwendet.

Um die Länge der Klangkörper zu bestimmen ziehen wir Gleichung (4) heran. Allerdings sind die Materialkonstanten im allgemeinen unbekannt. Deshalb wird diese Gleichung etwas umgewandelt

$$v_k \cdot l^2 = \frac{m_k^2 \chi}{2\pi} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (8)$$

Das Produkt aus Frequenz und dem Quadrat der Länge ist konstant. Es genügt also eine Röhre bekannter Länge zum Schwingen zu bringen und ihre Frequenz zu messen, um dieses Produkt zu bestimmen.

Um die ungefähre Länge des Testrohrs zu bestimmen, werden Literaturwerte [4] herangezogen:

$$\begin{aligned} G &= 2,6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \\ \rho &= 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (9)$$

Aus der Geometrie wird  $\chi = 3,91 \text{ mm}$  berechnet und aus Tabelle 1 der Beiwert für die Grundschwingung  $m_1 = 4,73$  übernommen.

Aus (8) wird  $v_1 \cdot l^2 = 43,2 \text{ m}^2/\text{s}$  bestimmt. Damit wird zur Realisierung einer Röhre die bei  $g'$  (396 Hz) schwingt, eine Länge von  $l=33 \text{ cm}$  benötigt. Mit einem Spektrumanalysator wird jedoch eine Frequenz von  $v=414 \text{ Hz}$  gemessen, was einem Frequenz-Längenquadratprodukt von  $45,11 \text{ m}^2/\text{s}$  entspricht. Das verwendete Rohr nutzt Aluminium mit zu den Literaturwerten leicht abweichenden Materialkonstanten.

Als Spektrumanalysator kann zum Beispiel ein Audibearbeitungsprogramm eines PCs (z. B. Audacity) verwendet werden. Steht dieses nicht zur Verfügung kann man sich auch eines elektronisches Geräts zum Stimmen einer Gitarre verwendet. Das Rohr muss dann so lange bearbeitet werden, bis das Gerät den korrekten Ton anzeigt. Über die gemessene Länge kann wieder das Produkt berechnet werden.

Mit diesem Wert werden die Längen der anderen Rohre bestimmt:

Ton	Frequenz	berechnete Länge
$g'$	396 Hz	33,8 cm
$c''$	528 Hz	29,2 cm
$e''$	660 Hz	26,1 cm
$g''$	792 Hz	23,9 cm
$c'''$	1056 Hz	20,7 cm

Tabelle 4: Berechnete Länge der Klangrohre

Die Rohre werden nun in dieser Form realisiert. Grundsätzlich können die Röhren nur noch höher gestimmt werden, indem sie an ihrem unteren Ende abgefeilt und abgeschliffen werden. Ein Tieferstimmen ist nur sehr bedingt möglich, indem die Außenhaut in der Mitte der Röhre mit feinstem Schmirgelpapier abgedünnt wird [5]. Deshalb werden sie einige Millimeter länger hergestellt und im Test dann etwas weiter mit einer Feile verkürzt.

## Das Problem mit den Harmonischen

Ein Blick zurück auf Gleichung (8) zeigt, dass die harmonischen Schwingungen der Rohre nicht mit den reinen Tönen zusammentreffen. Folgende Tabelle zeigt die Frequenzvielfachen der Rohre und die diesen Frequenzen am nächsten kommenden Töne, wobei der Grundton  $g'$  angenommen wird:

$k$	$v_k/v_1$	nächster Ton zu $g'$
1	1,000	$g'$
2	2,757	$2,667 = c'''$
3	5,404	$5,333 = c''''$
4	8,933	$8,889 = a''''$

Tabelle 5: Harmonische Schwingungen

Die Verhältnisse entsprechen dem Quotienten

$$\frac{m_k^2}{m_1^2} \quad (10)$$

Damit liegt der erste Oberton des längsten Rohres, das den Ton  $g'$  erzeugt, bei 1090 Hz und sehr nah bei  $c'''$ , was zu einer Dissonanz führt. Deshalb wird das kurze Rohr um weitere 2-3mm nach dem Gehör gekürzt um einen höheren, dem Oberton des längsten Rohres ähnlichen, Ton zu erzeugen.

## Montage

Die Schwingungsknoten sind jene Stellen am Rohr, die nicht schwingen. Hier werden die Rohre gehalten. Dazu wird bei jeweils 22,4% der Länge ein Loch in das Rohr gebohrt, durch das anschließend die Befestigungsschnur geführt wird.

Die Länge der Befestigungsschnüre wird so gewählt, dass der Anschlag für alle Rohre etwa in der Mitte, dem Schwingungsbauch, also jener Stelle mit der größten Schwingung, erfolgt.

Als Schlägel wird ein weiches Material gewählt, da ein sanfter Anschlag die Erzeugung von unerwünschten Obertönen verhindert.

Damit ist das Glockenspiel fertig.

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Beiwerte.....	3
Tabelle 2: Lage der Schwingungsknoten.....	3
Tabelle 3: Töne und Frequenzen.....	4
Tabelle 4: Berechnete Länge der Klangrohre.....	5
Tabelle 5: Harmonische Schwingungen.....	6

## Literaturverzeichnis

- 1: Handbuch der Physik, VIII Akustik, Julius Springer, 1927,II. Erzeugung akustischer Schwingungen
- 2: Lehrbuch der Physik, I, BSB B.G. Teubner, „Musikalische Tonlehre
- 3: Wikipedia, , <http://de.wikipedia.org>, 2010,Reine Stimmung
- 4: Nachschlagebücher für Grundlagenfächer, Physik, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1987,Kuchling
- 5: Musikinstrumente selbst bauen, Kurt Schweizer, Susanne Bosshard, Otto Maier Verlag, 1983,